

# 6

## FIGURAS PLANAS

Neste capítulo estudam-se os polígonos e as circunferências. Mostra-se como se representam estas figuras em diferentes posições, recorrendo ou não a processos auxiliares.

Sumário:

2 e 3. Noções de geometria plana

4 e 5. Representação direta de polígonos

6, 7 e 8. Verdadeira grandeza de polígonos recorrendo a rebatimentos

9, 10, 11 e 12. Representação de polígonos recorrendo a rebatimentos

13 e 14. Representação de circunferências em planos projetantes

15 e 16. Representação de circunferências em planos não projetantes

17 e 18. Alterar as posições de triângulos utilizando rotações

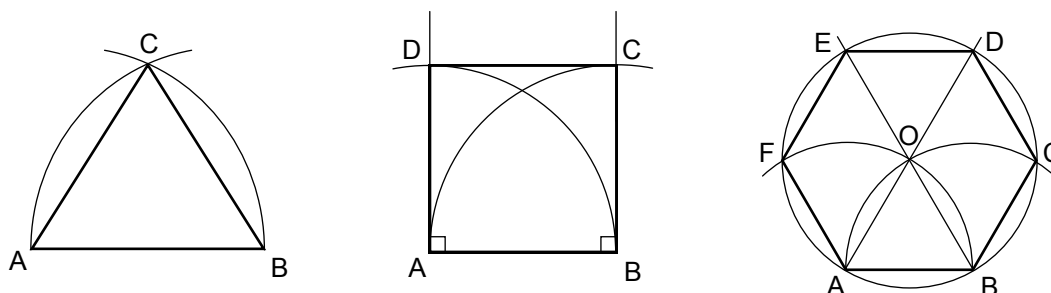
19 e 20. Alterar as posições de triângulos utilizando mudanças de planos.

21 e 22. Exercícios

## Noções de geometria plana

Aqui recordam-se alguns aspetos fundamentais da geometria plana, sem os quais não é possível resolver grande parte dos exercícios de polígonos e de sólidos. Concretamente, recorda-se como se constrói um polígono a partir de um lado e de uma diagonal, o que é útil quando um enunciado refere apenas dois dos vértices, sejam consecutivos ou opostos.

Nos exercícios que depois se mostram não estão representados os processos de construção dos polígonos para não sobrecarregar o traçado, mas na prática eles deverão ser feitos, por um ou outro processo, consoante os dados sejam apresentados no enunciado.



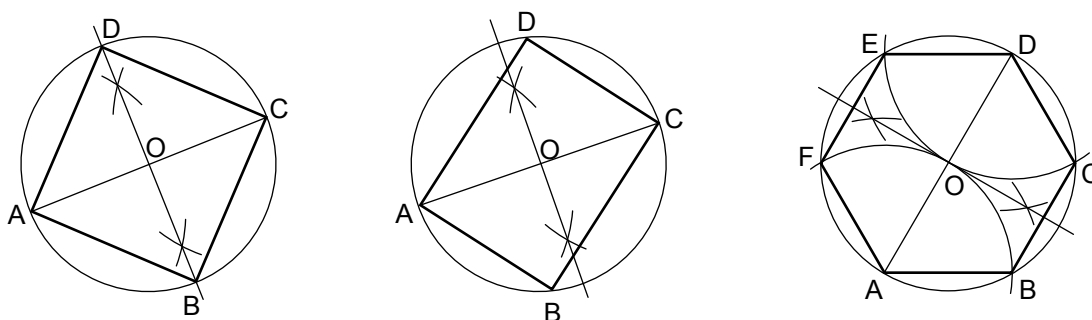
### Construção do triângulo equilátero, do quadrado e do hexágono a partir de um lado

Cada um dos polígonos aqui representado foi construído a partir do seu lado [AB].

Triângulo: Com o compasso aberto de A a B, e vice-versa, determinou-se o vértice C.

Quadrado: Traçaram-se duas perpendiculares ao lado [AB], uma a partir de cada extremo; sobre essas perpendiculares marca-se a medida desse lado com o compasso. Marca-se assim a medida do lado quando esta não tem um valor inteiro, pois quando o tem pode marcar-se com a régua diretamente nas perpendiculares.

Hexágono: A partir do lado [AB] determinou-se o ponto O, centro da circunferência (com o processo usado para achar o vértice C do triângulo); com o compasso em O traçou-se a circunferência; os vértices C e F foram determinados com os mesmos arcos com que se determinou o ponto O; os vértices D e E foram determinados com linhas retas (ou diâmetros) traçados a partir de A e de B.



### Construção do quadrado, do retângulo e do hexágono a partir de uma diagonal

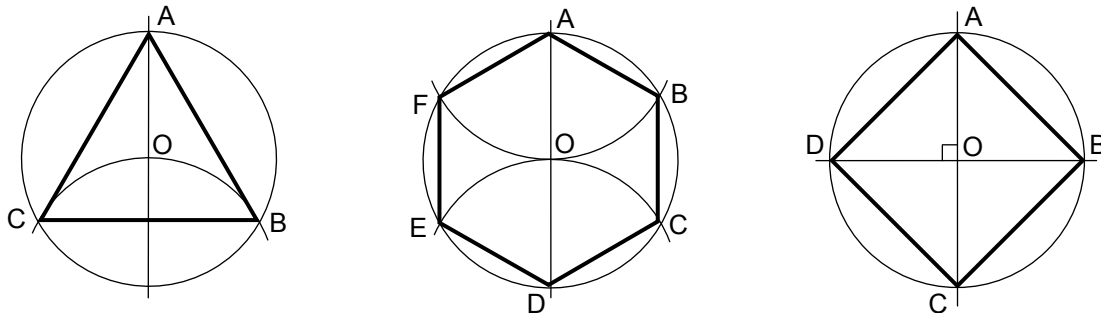
O quadrado e o retângulo foram construídos a partir da diagonal [AC], o hexágono a partir de [AD].

Quadrado: Determinou-se a mediatriz de [AC], colocando o compasso nesses pontos com uma abertura superior a metade do tamanho do segmento de reta; com o compasso no ponto O traçou-se uma circunferência passando pelos vértices A e C; onde essa circunferência cruza a mediatriz surgem os vértices B e D.

Retângulo: Determinou-se a mediatriz de [AC] e a circunferência com centro em O como se fez no quadrado; a determinação dos vértices B e D faz-se de acordo com a tamanho de um dos lados, que tem de ser dado.

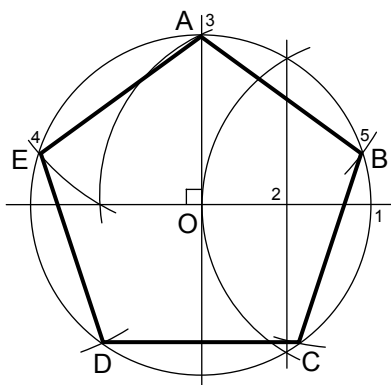
Hexágono: Determinou-se a mediatriz de [AD] e a circunferência com centro em O como nos casos anteriores; Para determinar os restantes vértices, traçam-se arcos com o compasso nos vértices A e D passando por O.

Nesta página recorda-se a divisão da circunferência em partes iguais e a construção de polígonos nela inscritos, aqueles que se utilizam com mais frequência nos exercícios de Geometria Descritiva. Mostra-se também como se determinam retas tangentes a circunferências, o que se aplica na construção de cones e de cilindros oblíquos e na determinação das sombras destes sólidos.



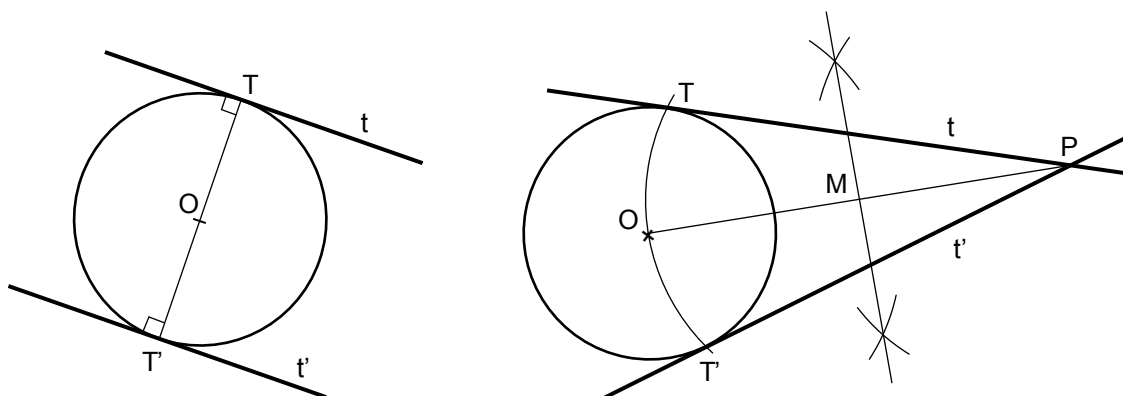
### Construção do triângulo do hexágono e do quadrado inscritos na circunferência

**Triângulo:** Aqui traçou-se uma linha vertical pelo centro da circunferência, dando origem ao vértice A e a um ponto oposto; nesse ponto coloca-se o compasso e traça-se um arco, passando por O, determinando-se A e B.  
**Hexágono:** A vertical que se traça pelo centro da circunferência permite determinar os vértices A e D; coloca-se o compasso nesses pontos e traçam-se arcos passando por O, determinando-se assim os restantes vértices.  
**Quadrado:** Duas linhas perpendiculares entre si, cruzando-se no centro da circunferência, cortam-na em quatro partes iguais, o que dá origem aos vértices de um quadrado; aqui traçou-se uma horizontal e uma vertical.



### Construção do pentágono inscrito na circunferência

Traçam-se duas linhas retas pelo centro da circunferência, perpendiculares entre si, de onde se define o ponto A como um vértice da figura. Com o compasso em 1 traçou-se um arco a passar pelo ponto O, cruzando a circunferência em dois pontos; unidos esses pontos com uma linha reta, coloca-se o compasso em 2, abre-se até ao ponto A e traça-se um arco até à linha horizontal; com o compasso em 3 (ponto A), abre-se até ao ponto acabado de determinar, fazendo um pequeno arco para a esquerda e um outro para a direita, dando origem aos vértices E e B; com o compasso em 4 e 5 (pontos E e B), mantendo a mesma abertura, determinam-se os vértices D e C.

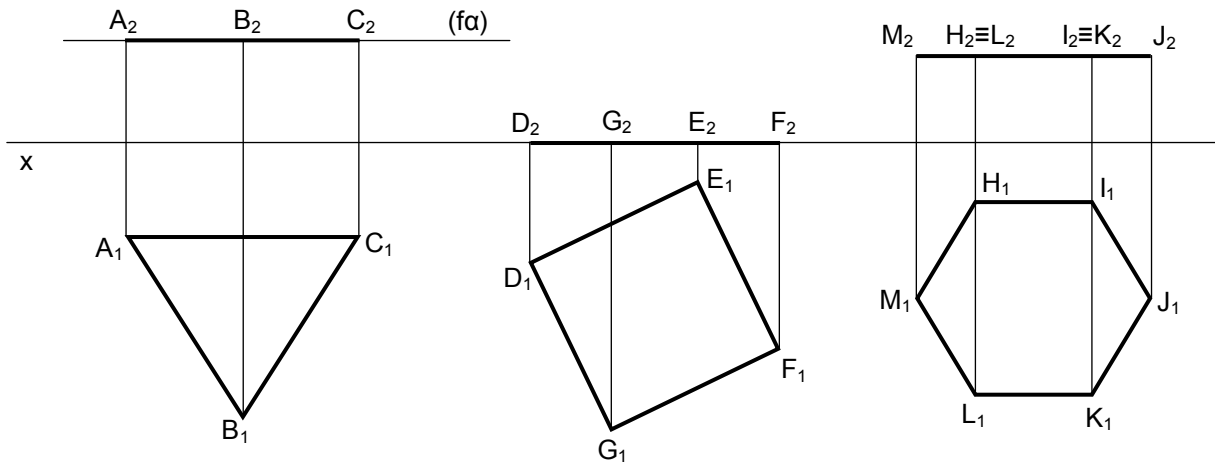


### Retas tangentes a circunferências

Para se representarem retas tangentes a circunferências é necessário determinar os pontos de tangência. À esquerda mostram-se duas retas paralelas, cujos pontos de tangência T e T' se determinam com um diâmetro, dado que as tangentes lhe são perpendiculares. À direita mostram-se duas retas concorrentes em P, cujos pontos de tangência se determinam do seguinte modo: 1- traça-se o segmento de reta [OP]; 2- com o compasso nos pontos O e P, cruzam-se arcos com abertura superior a metade do segmento, determinando-se o seu ponto médio; 3- com o compasso em M traça-se um arco passando por O, que determina os pontos T e T'.

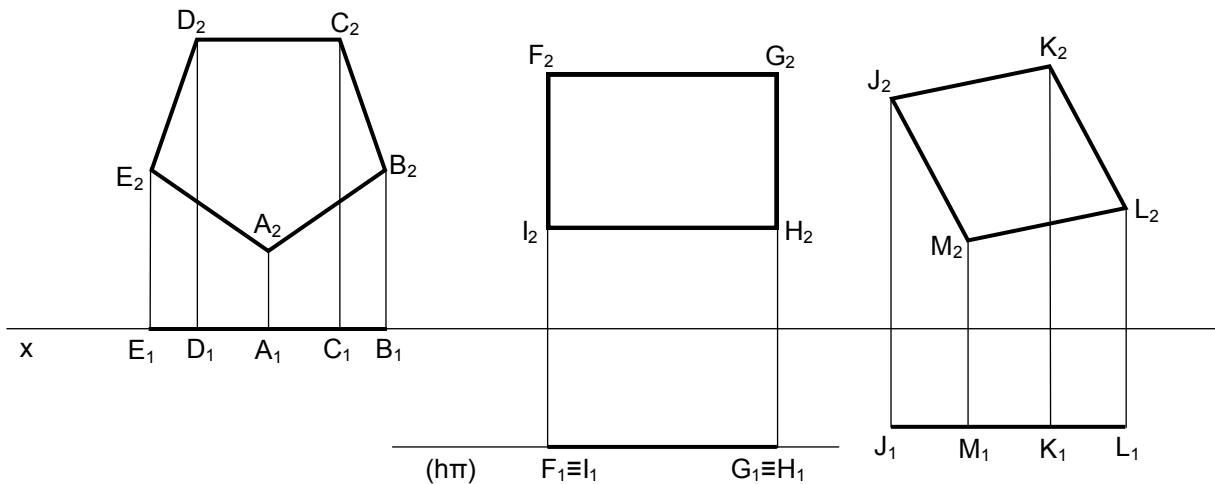
## Representação direta de polígonos

Nesta página estão representados polígonos horizontais e frontais. Para não se sobrecarregar os traçados, não se mostram as construções auxiliares com que se determinam as figuras. Esta matéria estuda-se essencialmente no primeiro diedro, pelo que é aí que estes polígonos estão representados. O estudo dos polígonos é também importante como introdução ao estudo dos sólidos.



### Representação de triângulo, quadrado e hexágono horizontais

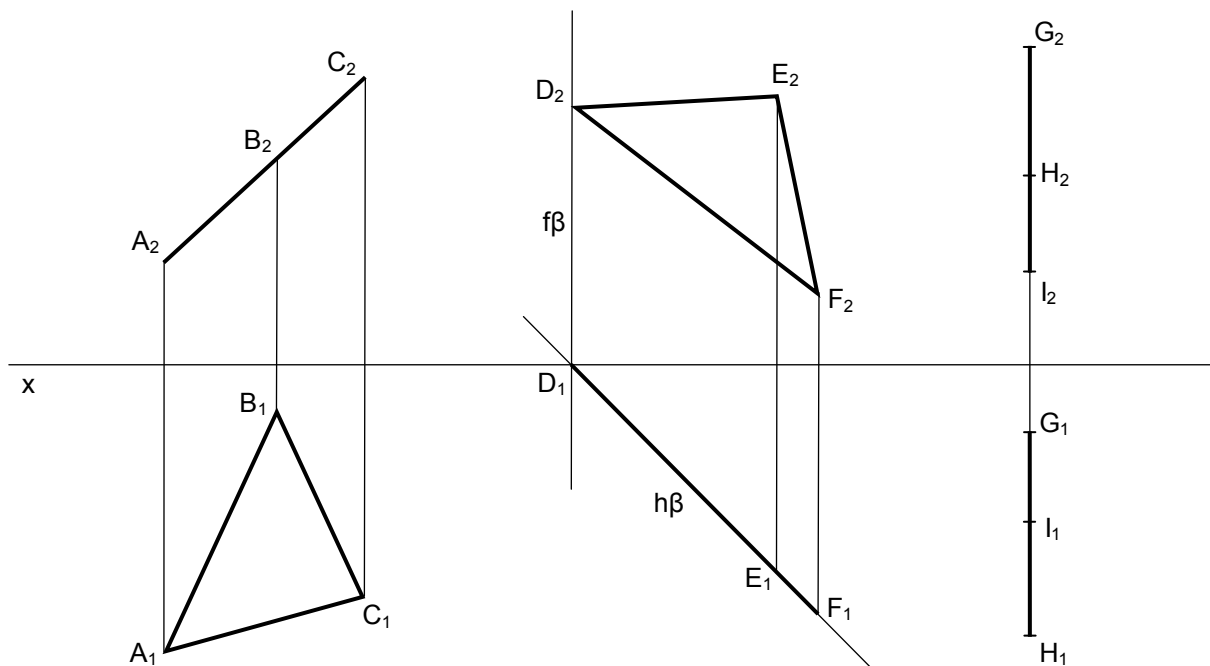
As projeções frontais dos polígonos horizontais são segmentos de reta paralelos ao eixo x, ou nele situadas caso as figuras tenham cota nula. Pode indicar-se o plano que contém a figura, como acontece no primeiro exemplo.



### Representação de pentágono, retângulo e losango frontais

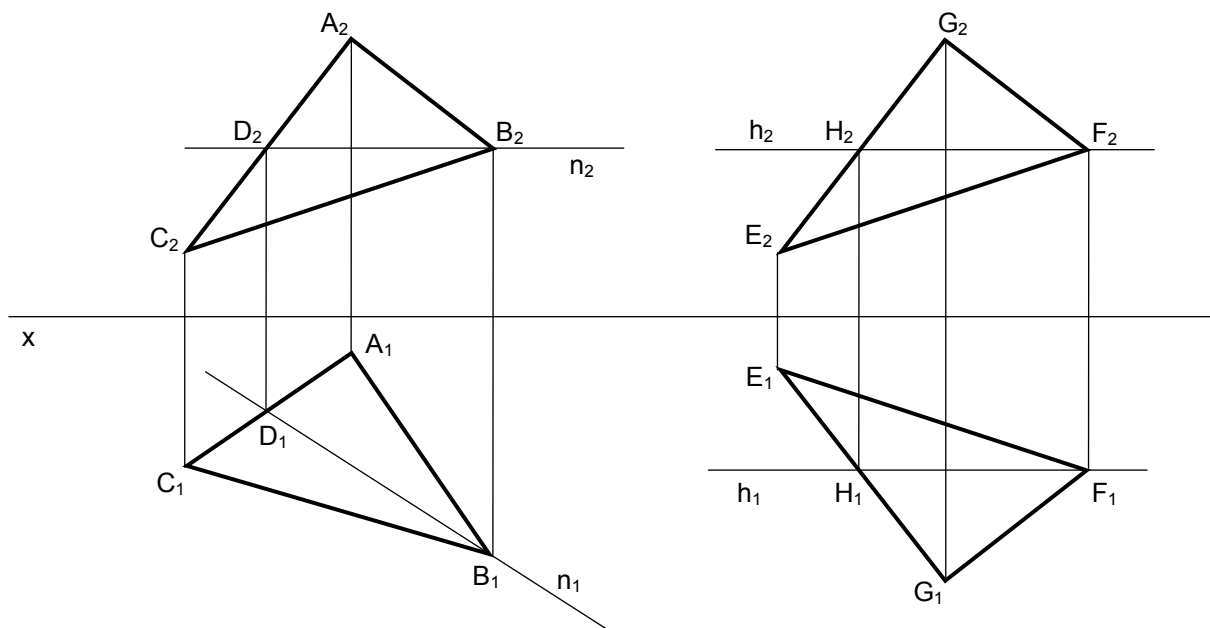
As projeções horizontais dos polígonos frontais são segmentos de reta paralelos ao eixo x, ou nele situadas caso as figuras tenham afastamento nulo. Pode indicar-se o plano que contém a figura, como se mostra no segundo exemplo.

Aqui estão representados triângulos em cinco posições diferentes. Trata-se de triângulos irregulares, que podem ser representados sem recurso à sua verdadeira grandeza, ou seja, sem recurso a rebatimentos ou a qualquer outro processo auxiliar.



### Representação de triângulos de topo, vertical e de perfil

Estes triângulos existem em planos projetantes com os mesmos nomes, mas apenas no segundo caso está representado o plano que contém a figura. Os triângulos de topo e verticais têm, respetivamente, as projeções frontal e horizontal reduzidas a um segmento de reta perpendicular ao eixo  $x$ ; o de perfil tem ambas as projeções reduzidas a um segmento de reta perpendicular ao eixo  $x$ .

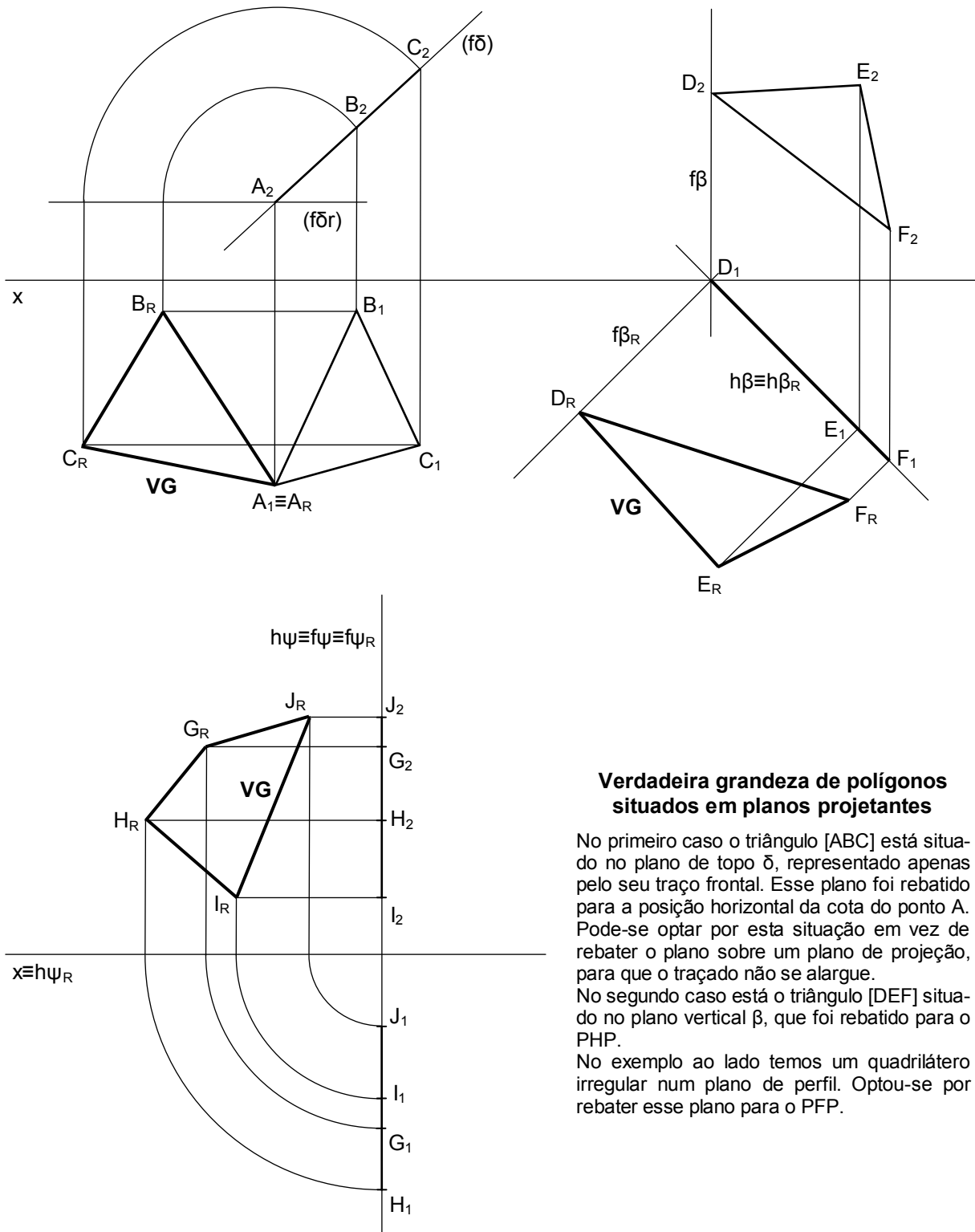


### Representação de triângulos oblíquo e de rampa

Para provar que estes triângulos estão nas posições oblíquo e de rampa cruzou-se com eles uma reta horizontal (pode também ser frontal), no primeiro caso, e uma reta fronto-horizontal, no segundo, pois essas são retas que pertencem aos planos oblíquo e de rampa, respetivamente.

## Verdadeira grandeza de polígonos recorrendo a rebatimentos

Nesta página mostra-se como se determina a verdadeira grandeza de triângulos situados em planos projetantes, através do método dos rebatimentos, que é o mais aconselhável para a representação de polígonos, estejam eles em que posição estiverem.



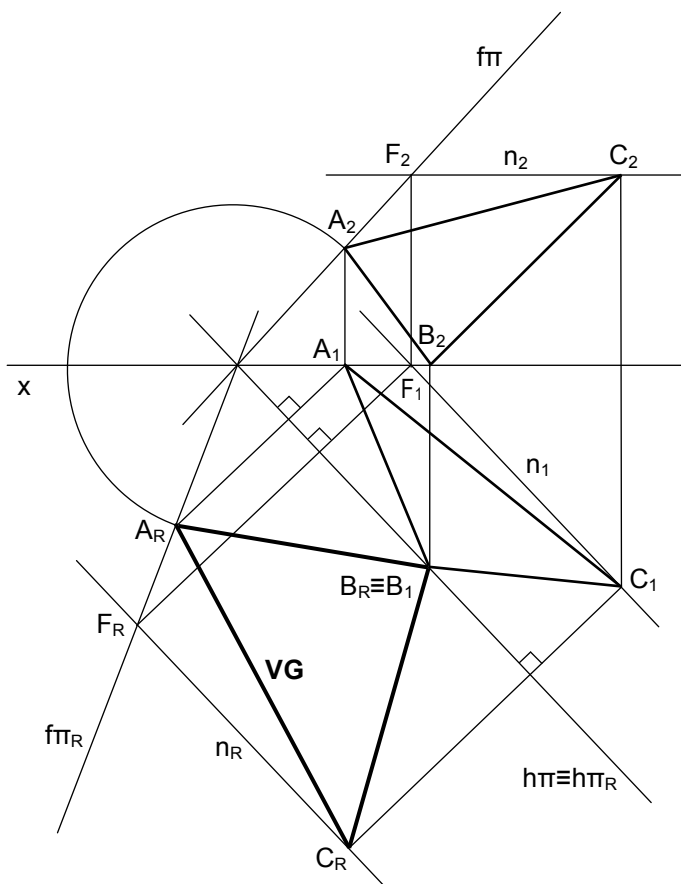
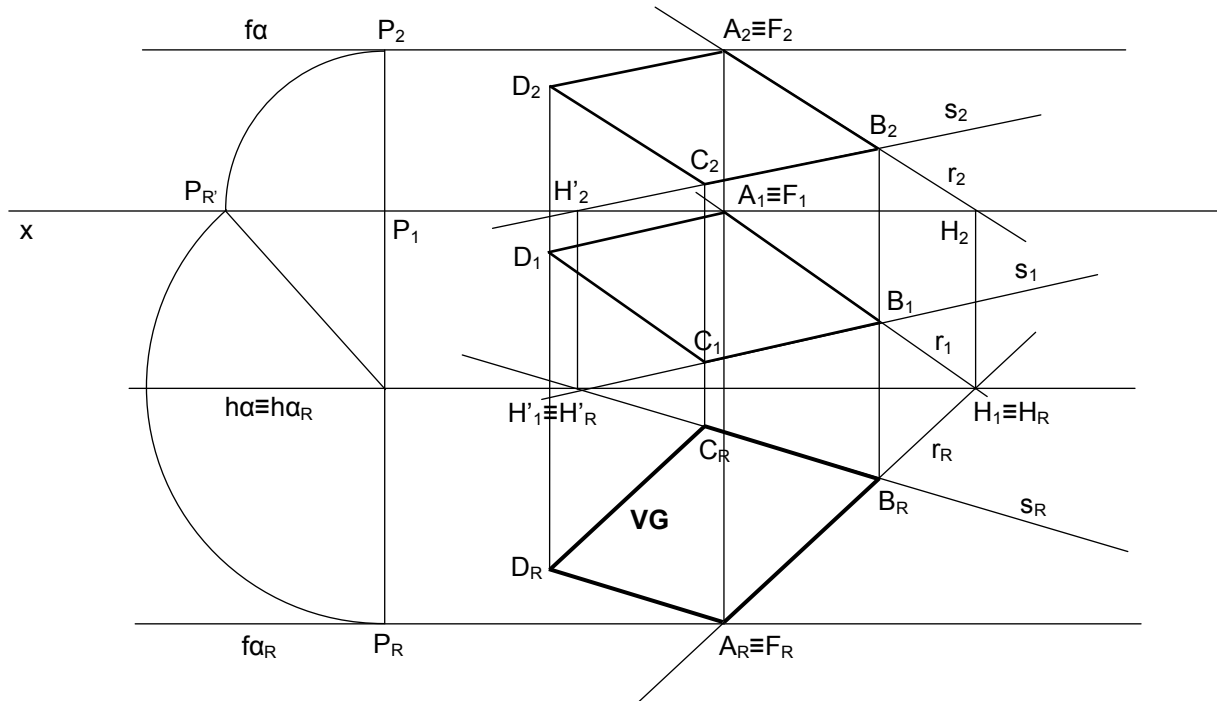
### Verdadeira grandeza de polígonos situados em planos projetantes

No primeiro caso o triângulo  $[ABC]$  está situado no plano de topo  $\delta$ , representado apenas pelo seu traço frontal. Esse plano foi rebatido para a posição horizontal da cota do ponto  $A$ . Pode-se optar por esta situação em vez de rebater o plano sobre um plano de projeção, para que o traçado não se alargue.

No segundo caso está o triângulo  $[DEF]$  situado no plano vertical  $\beta$ , que foi rebatido para o PHP.

No exemplo ao lado temos um quadrilátero irregular num plano de perfil. Optou-se por rebater esse plano para o PFP.

Aqui determinam-se verdadeiras grandezas de figuras situadas em planos não projetantes. De notar que este tipo de exercícios só se aplica a figuras que se podem representar sem necessidade de recorrer previamente a qualquer método geométrico auxiliar. De um modo geral, essas figuras são triângulos e quadriláteros irregulares.

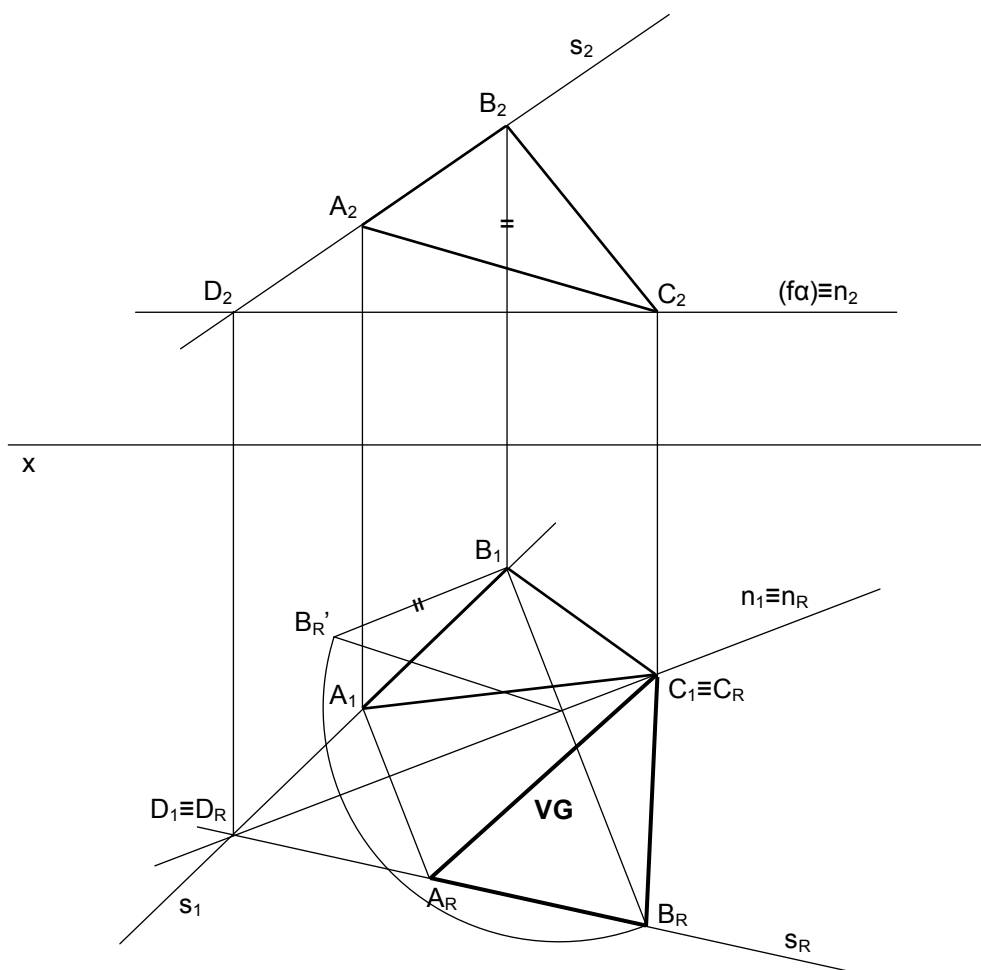


### Verdadeira grandeza de polígonos situados em planos não projetantes

Em cima temos um quadrilátero situado num plano de rampa, representado com a ajuda de duas retas oblíquas. Essas são as mesmas retas que foram rebatidas para o PHP para determinar a VG do polígono. O vértice D não precisa de reta de apoio dado que a figura tem os lados paralelos dois a dois.

No exemplo ao lado temos um triângulo num plano oblíquo, com um vértice no traço frontal, outro no traço horizontal do plano, e outro na reta horizontal n. O plano e a reta foram rebatidos para o PFP.

Aqui mostra-se como se determina a verdadeira grandeza de um triângulo oblíquo, sem representação dos traços do plano onde se situa. Faz-se recurso do triângulo do rebatimento, como se mostrou no capítulo Métodos Geométricos Auxiliares para rebater planos definidos por duas retas.



### Verdadeira grandeza de um triângulo oblíquo

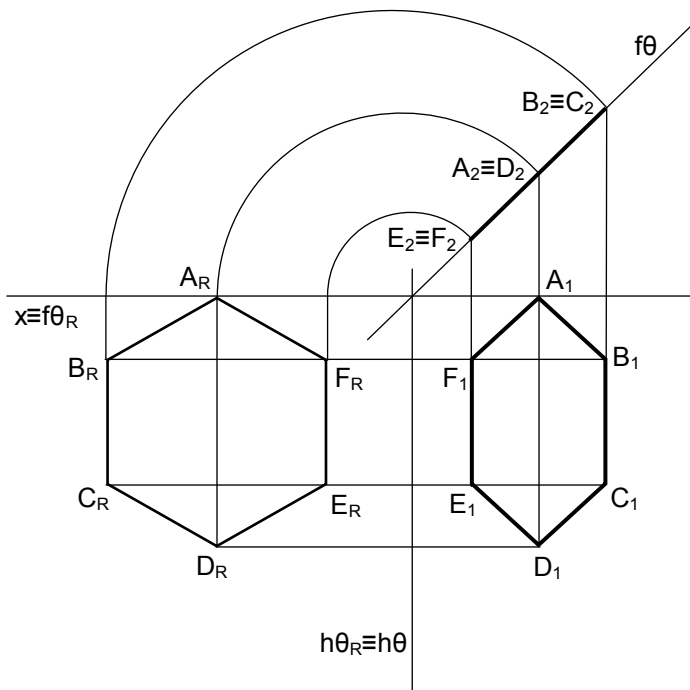
Fez-se passar pelo lado  $[AB]$  a reta  $s$ , de modo a que o plano horizontal  $\alpha$  que passa por  $C$  tenha aí um ponto, neste caso o  $D$ . Por esses pontos passa a charneira  $n$ , em torno da qual se faz rebater o ponto  $B$ , comum à reta e ao lado  $[BC]$ . Os pontos  $C$  e  $D$  são fixos. Para rebater o ponto  $A$  basta deslocá-lo na perpendicular à charneira, na projeção horizontal.



## Representação de polígonos recorrendo a rebatimentos

Para representar polígonos regulares noutros planos que não os horizontal e frontal é necessário utilizar um método geométrico auxiliar. Sugere-se o rebatimento, uma vez que outros processos são mais complexos em termos de traçado.

De notar que, ao contrário do que aconteceu nas páginas anteriores, aqui os polígonos são primeiro construídos em verdadeira grandeza, e só depois são contrarrebatiados. Para não sobrecarregar os traçados não se mostram as construções auxiliares com que se determinam os polígonos rebatidos.

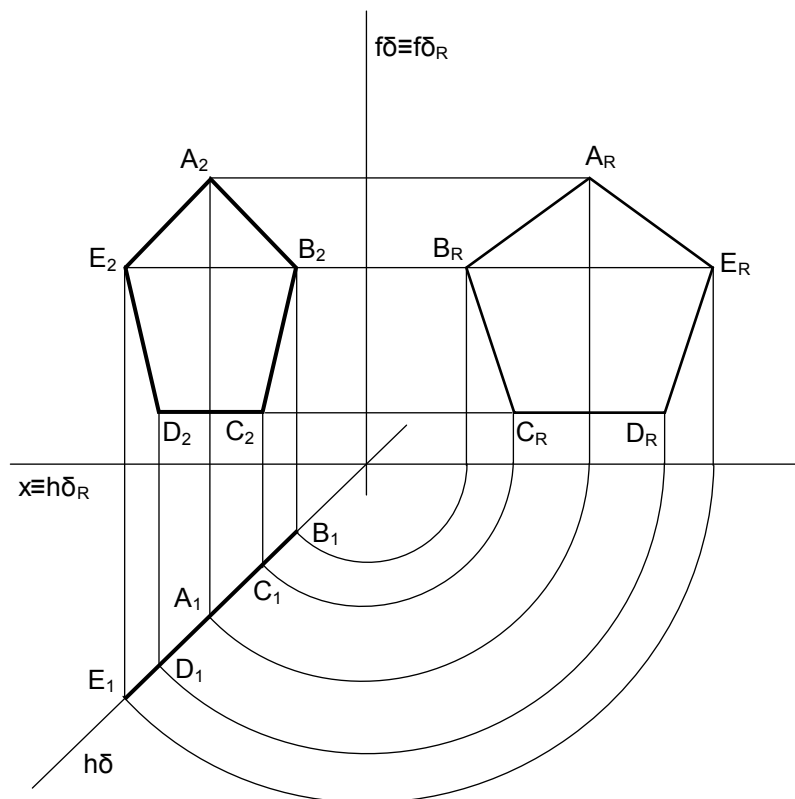


### Hexágono em plano de topo

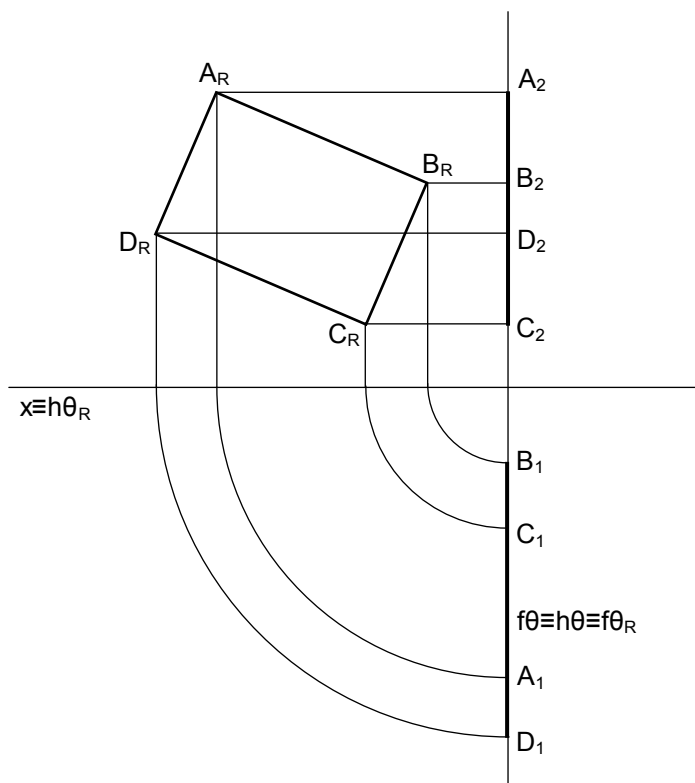
O hexágono está representado em verdadeira grandeza no rebatimento no plano horizontal de projeção, sendo contrarrebatiado para o plano de topo onde, obviamente, as suas projeções se deformam. Sendo o plano de topo projetante frontal, a projeção frontal do polígono fica reduzida a um segmento de reta.

### Pentágono em plano vertical

O pentágono está representado em verdadeira grandeza no rebatimento no plano frontal de projeção, sendo contrarrebatiado para o plano vertical, onde as suas projeções se deformam. Sendo o plano de topo projetante horizontal, a projeção horizontal do polígono fica reduzida a um segmento de reta.



Nesta página representam-se mais dois polígonos em situações distintas, já que um se situa num plano de perfil e o outro num plano oblíquo.



### Retângulo num plano de perfil

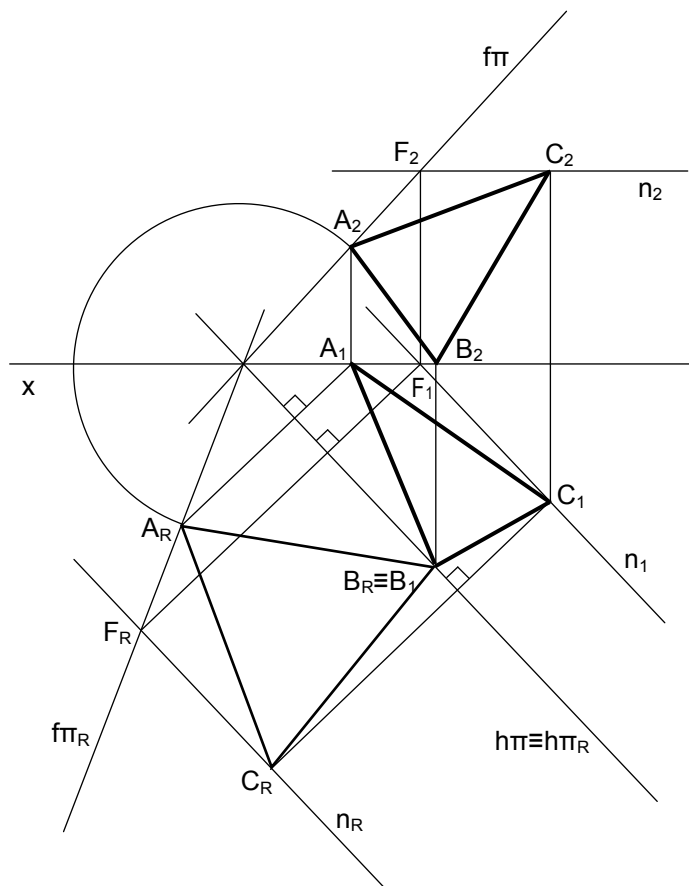
O retângulo está representado em verdadeira grandeza rebatido no PFP, sendo contrarreatado para o plano de perfil. Figuras planas situadas no plano de perfil, que é duplamente projetante, ficam reduzidas a segmentos de reta em ambas as projeções.

### Triângulo equilátero num plano oblíquo

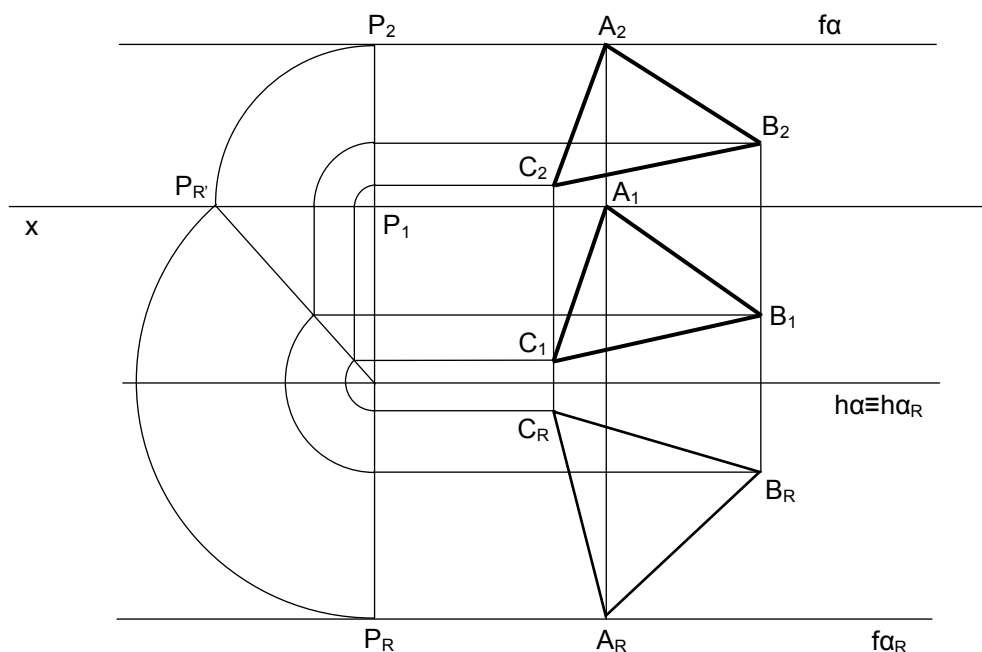
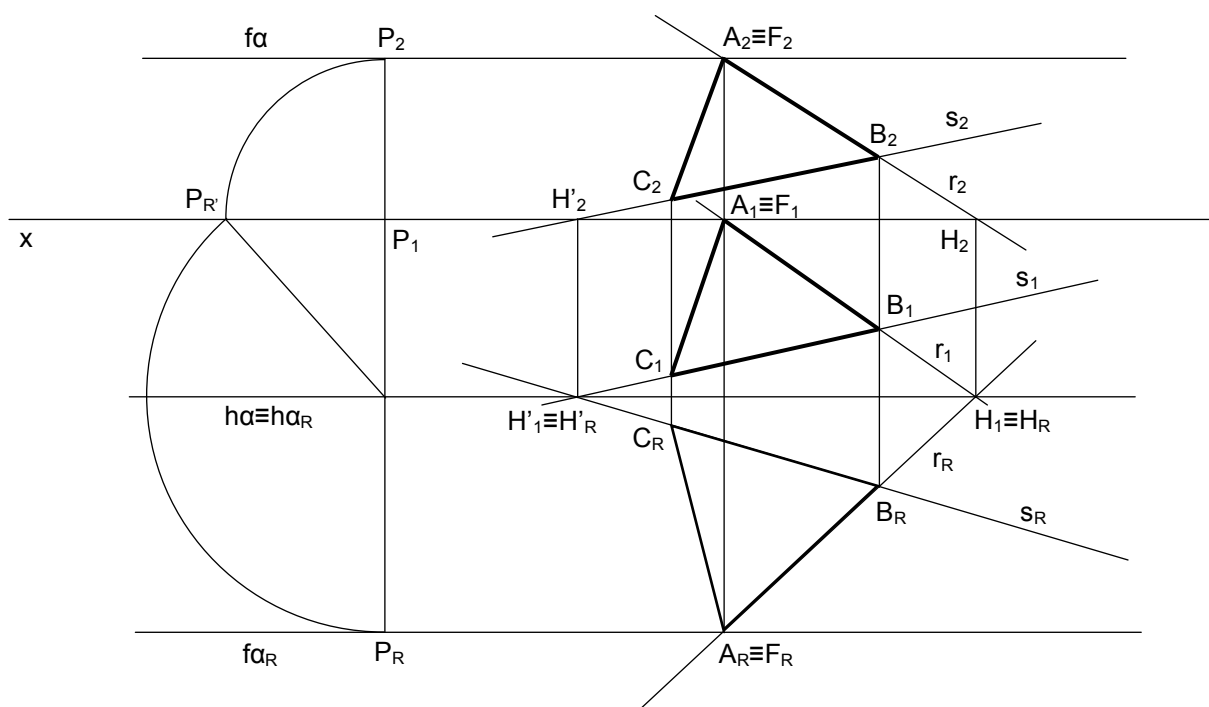
O triângulo está em verdadeira grandeza rebatido no PHP, sendo contrarreatado para o plano oblíquo. No caso apresentado, o vértice A situa-se no traço frontal do plano, o B situa-se no traço horizontal, que é a charneira do rebatimento. O vértice C é contrarreatado com o apoio de uma reta horizontal. De reparar que os pontos se deslocam da projeção horizontal para o rebatimento, e vice-versa, na perpendicular à charneira.

Se se tratasse doutro polígono, com mais vértices na situação do C, mais retas de apoio se utilizariam.

$$n_R // h\pi_R$$



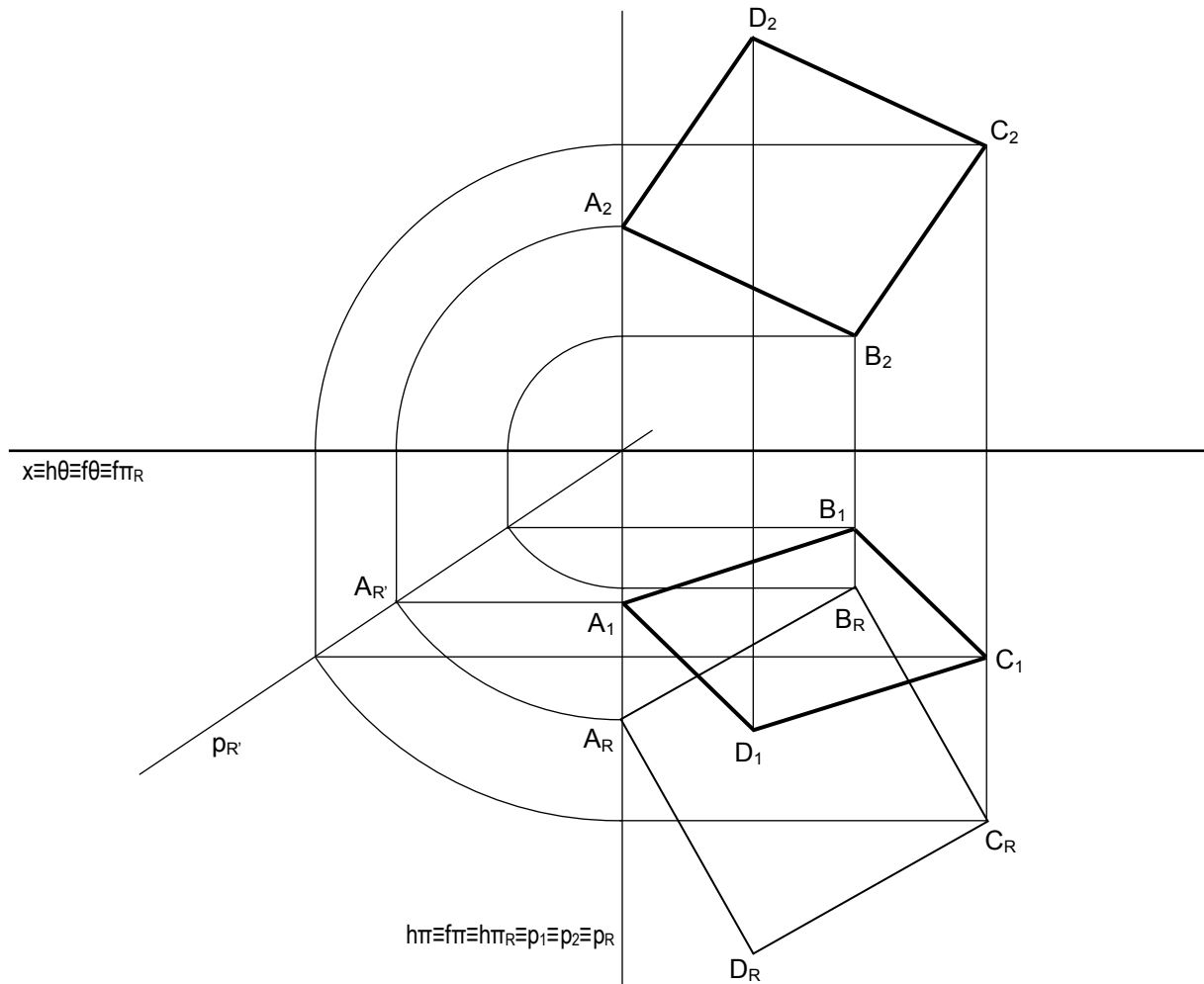
Aqui mostra-se a representação de um triângulo num plano de rampa, através de contrarrebatimentos onde são utilizados processos diferentes.



### Triângulo equilátero em plano de rampa

Em cima, para contrarrebater o triângulo, utilizam-se retas auxiliares que contêm os vértices. Em baixo deslocam-se os vértices rebatidos para a diagonal do ponto de apoio do rebatimento, encontrando-se a partir daí, através de linhas paralelas ao eixo x, as suas projeções. O vértice A contrarrebate-se diretamente por se situar no traço frontal do plano.

Aqui mostra-se a representação de um quadrado num plano passante. Sendo este uma variante do plano de rampa, o processo de resolução apresenta poucas diferenças em relação ao exercício da página anterior. Contudo, convém observá-lo dada a especificidade de alguns pomenores.

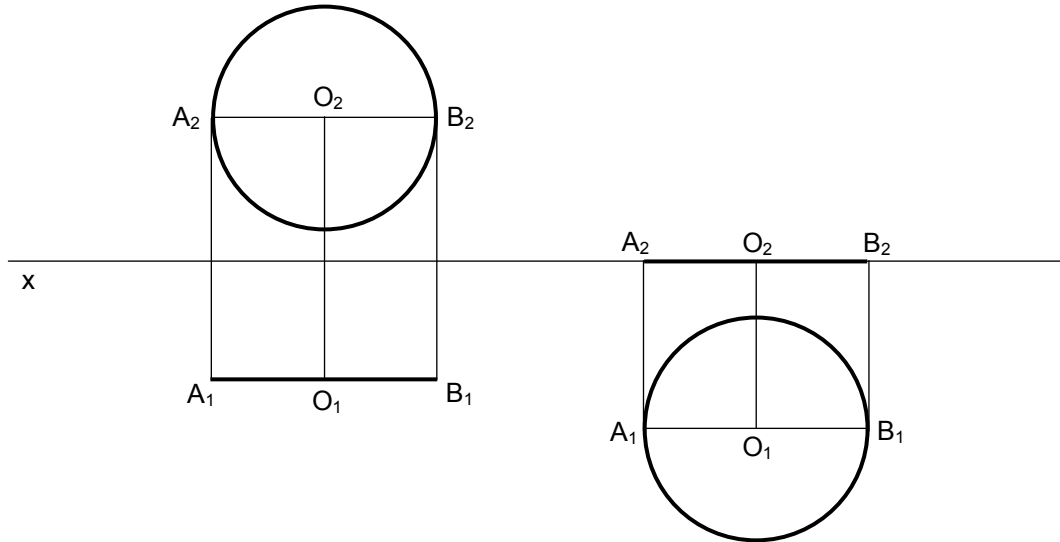


### Quadrado em plano passante

Parte-se aqui do princípio de que foi dado o ponto A e que a partir dele se construiu o quadrado rebatido [ABCD]. Para passar os vértices A, B e C do rebatimento para as projeções utilizou-se um rebatimento auxiliar da reta de perfil p e do plano de perfil  $\theta$ , que contém o ponto A. Sendo os lados do quadrado paralelos dois a dois, determinam-se as projeções do vértice D fazendo uso desse aspeto.

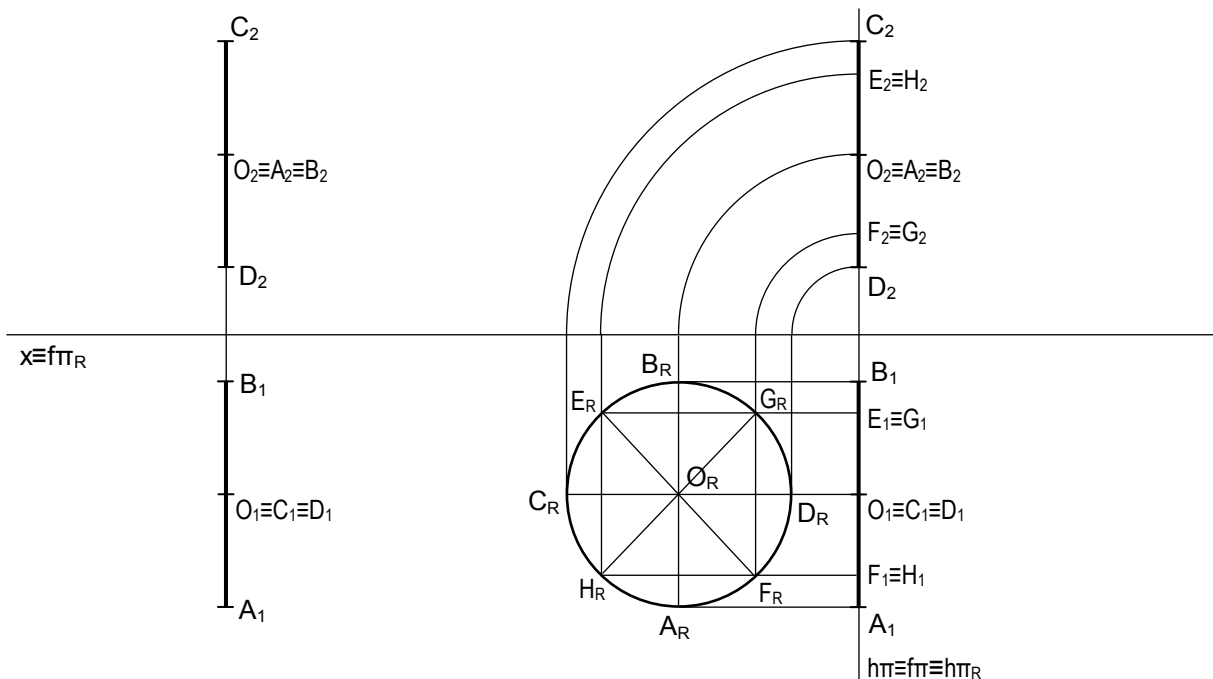
## Representação de circunferências em planos projetantes

Nesta página estão representadas circunferências nas posições frontal, horizontal e de perfil. As primeiras têm sempre representação direta, a de perfil pode ter necessidade da utilização de um rebatimento. Nestes casos de representação direta não há necessidade de indicar o plano onde a figura se situa, a não ser que o mesmo seja referido num enunciado.



### Circunferências horizontal e frontal

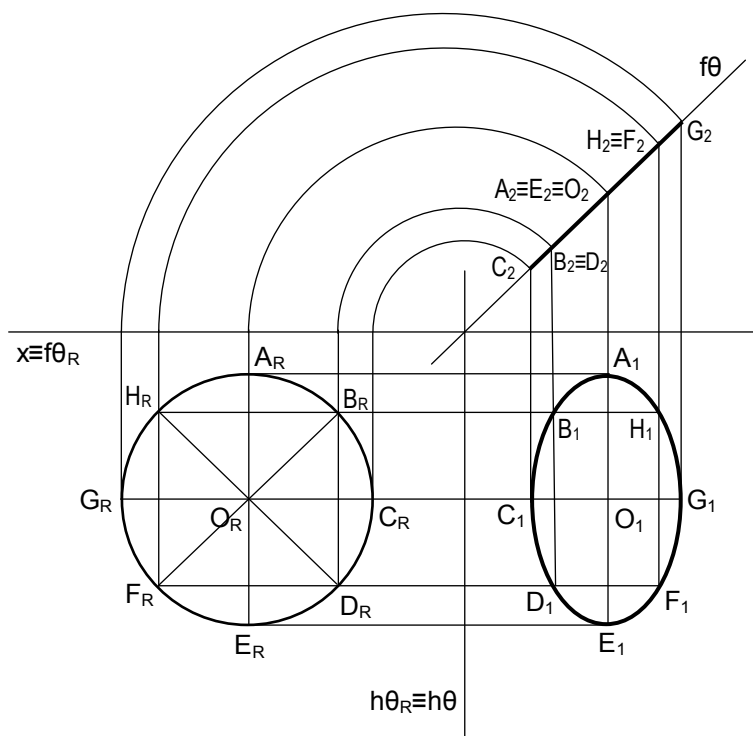
À esquerda está representada uma circunferência frontal com afastamento positivo. À direita está uma circunferência horizontal com cota nula. Em ambos os casos, os pontos A e B limitam a figura nos seus pontos de maior e menor abscissa. O ponto O é o centro da circunferência.



### Circunferências de perfil

A circunferência da esquerda foi representada diretamente, com indicação dos seus pontos de maior e menor afastamento (A e B) e de maior e menor cota (C e D). A da esquerda tem oito dos seus pontos indicados, resultantes da sua divisão em oito partes iguais. Para representar um ponto numa circunferência de perfil, que não seja nenhum dos quatro à esquerda, o rebatimento do plano que a contém é o processo mais aconselhável.

Nesta página estão representados circunferências em mais dois planos projetantes, o de topo e o vertical. Quando numa das projeções resulta uma elipse, esta é traçada à mão livre ou com uma régua articulável, também chamada cobra.

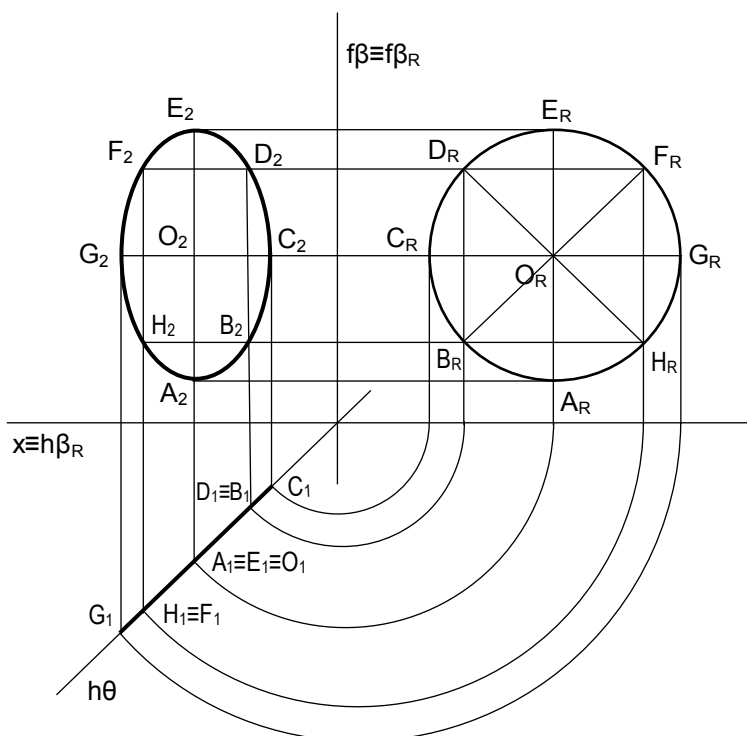


### Circunferência em plano de topo

A circunferência de topo fica reduzida a um segmento de reta na projeção frontal e transformada em elipse na horizontal. Para a representar, o método mais eficaz, em termos de traçado, é o do rebatimento. Por norma divide-se a circunferência em oito partes iguais e utilizam-se os pontos daí resultantes.

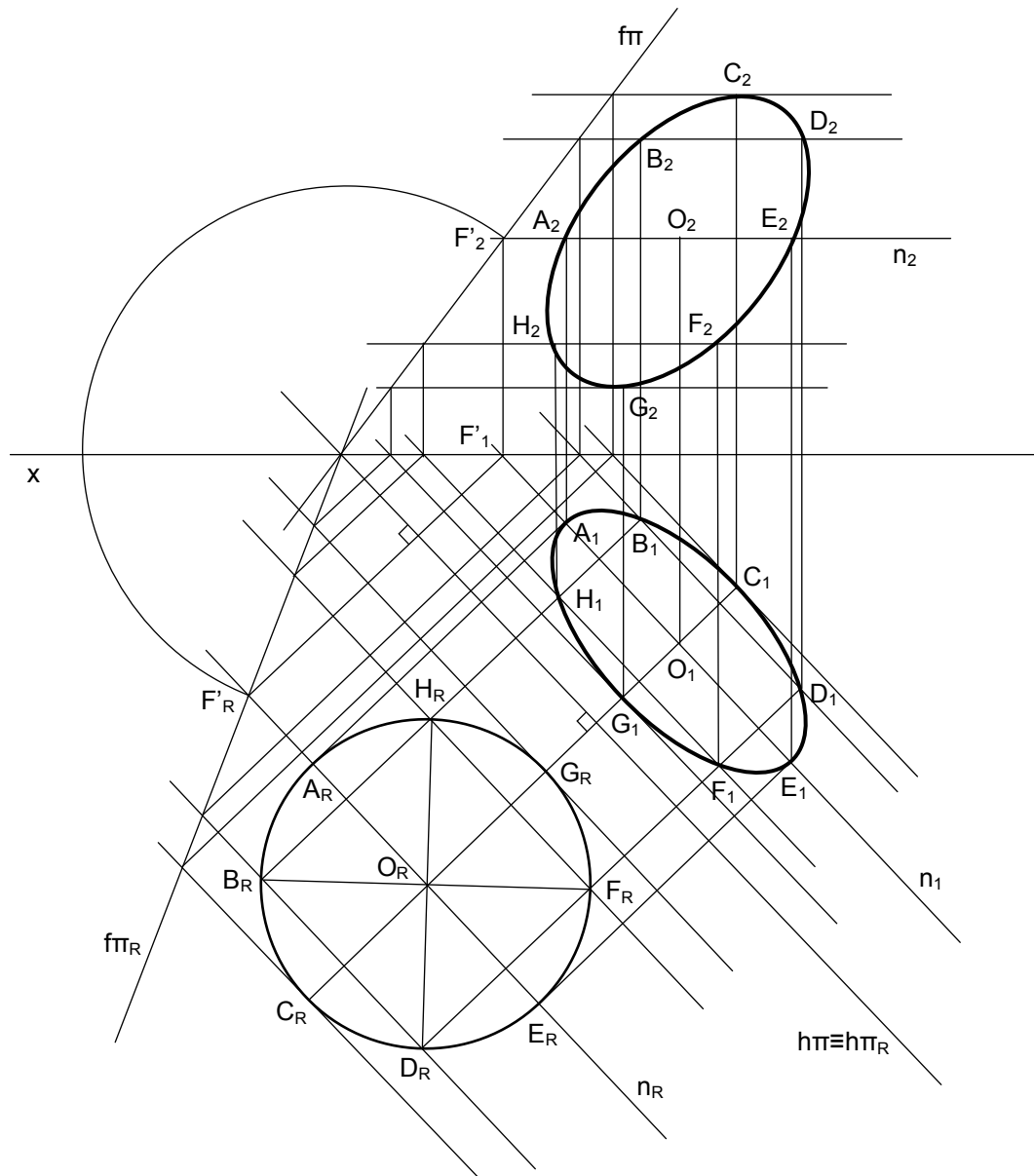
### Circunferência em plano vertical

Esta situação é a inversa da anterior. A projeção horizontal é um segmento de reta situado no traço homónimo do plano; a projeção frontal é uma elipse. Essa elipse é também aqui representada com recurso a oito pontos da circunferência obtidos através da divisão da circunferência rebatida em oito partes iguais.



## Representação de circunferências em planos não projetantes

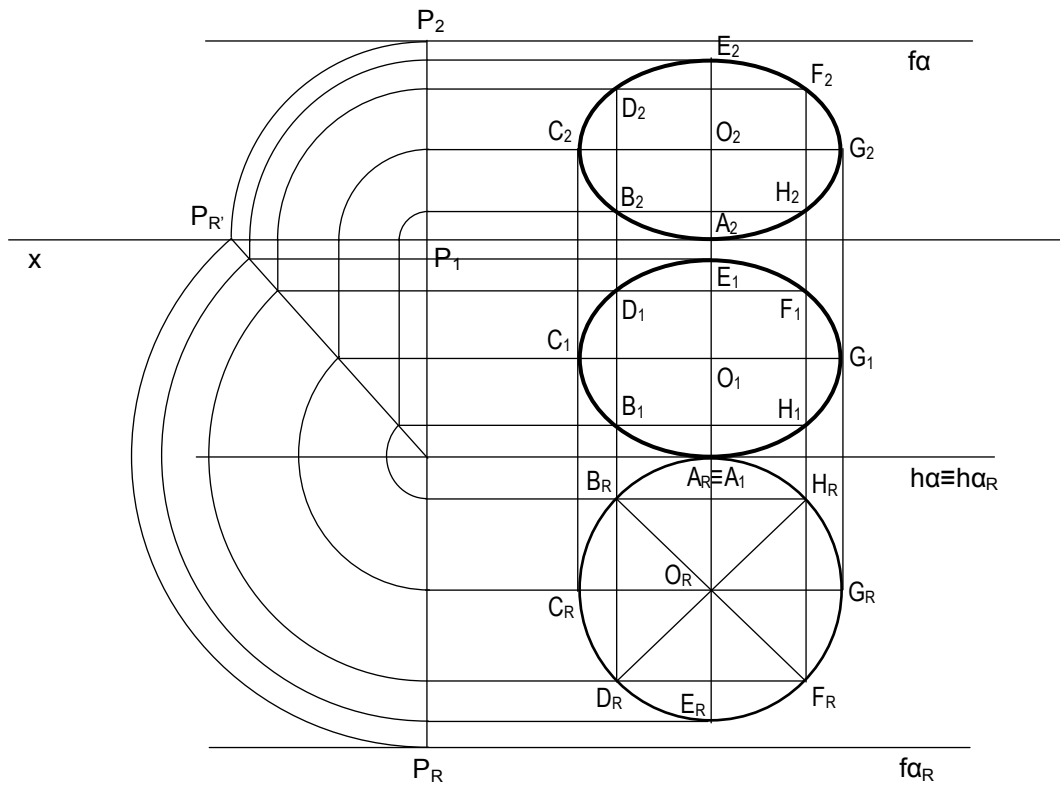
Nesta página mostra-se a representação de uma circunferência num plano oblíquo. Nesse plano ambas as projeções são elipses.



### Circunferência em plano oblíquo

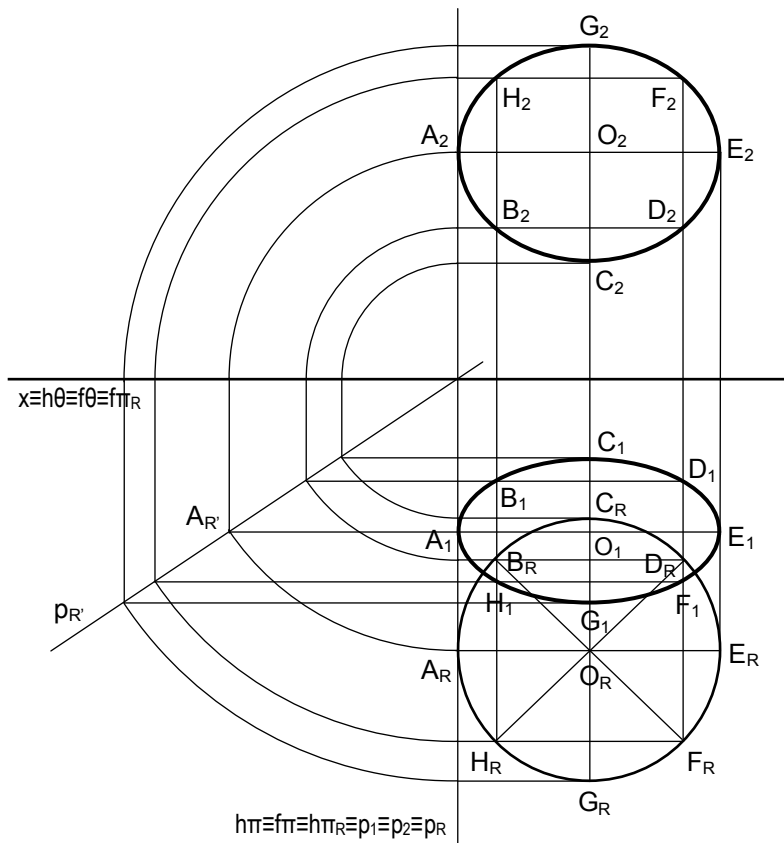
Para rebater o plano utilizou-se o traço da reta  $n$ , que contém o centro da circunferência. As projeções de uma circunferência oblíqua ficam ambas elípticas num plano oblíquo. Para determinar essas elipses divide-se a circunferência rebatida em oito partes iguais e contrarrebatem-se os pontos daí resultantes, neste caso com recurso a retas horizontais auxiliares. Não se indicam os nomes de mais retas horizontais para não sobrecarregar o traçado, e porque o mesmo seria irrelevante dado tratar-se de um processo repetitivo.

Aqui representam-se circunferências em planos de rampa, cujas projeções também são elipses.



**Circunferência em plano de rampa**

Também no plano de rampa as projeções de uma circunferência se transformam em elipses, pelo que também se utilizam oito pontos para as determinar. Aqui, para contrarrebater pontos fez-se uso do segmento de reta que serviu de base ao rebatimento do plano.



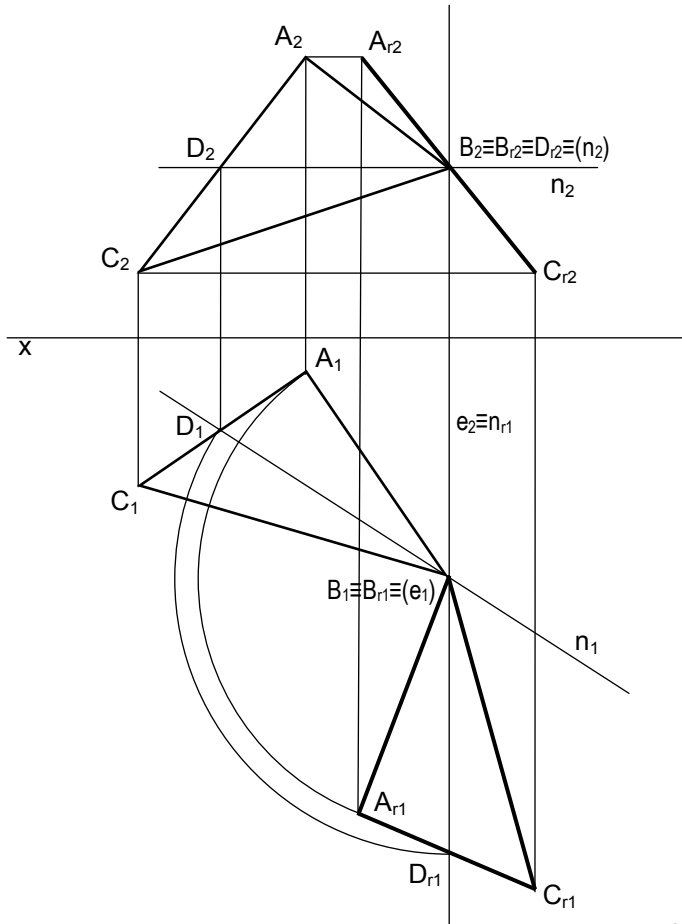
**Circunferência em plano passante**

Comparece-se este traçado com o da página 9, pois o procedimento é o mesmo, com a diferença de que aqui o contrarrebatemento é aplicado aos oito pontos necessários para construir as elipses. Tal como no primeiro exercício desta página, também neste a divisão da circunferência em oito partes iguais (aplicando linhas a 45°) leva a que alguns dos pontos fiquem alinhados dois a dois, o que permite reduzir traçado.



## Alterar as posições de triângulos utilizando rotações

Neste subcapítulo, parte-se sempre do mesmo triângulo oblíquo, alterando-o para outras posições. A resolução de qualquer outra situações em que a figura está à partida noutra posição, depreende-se facilmente depois de compreendidas estas.



### Passar um triângulo oblíquo para de topo

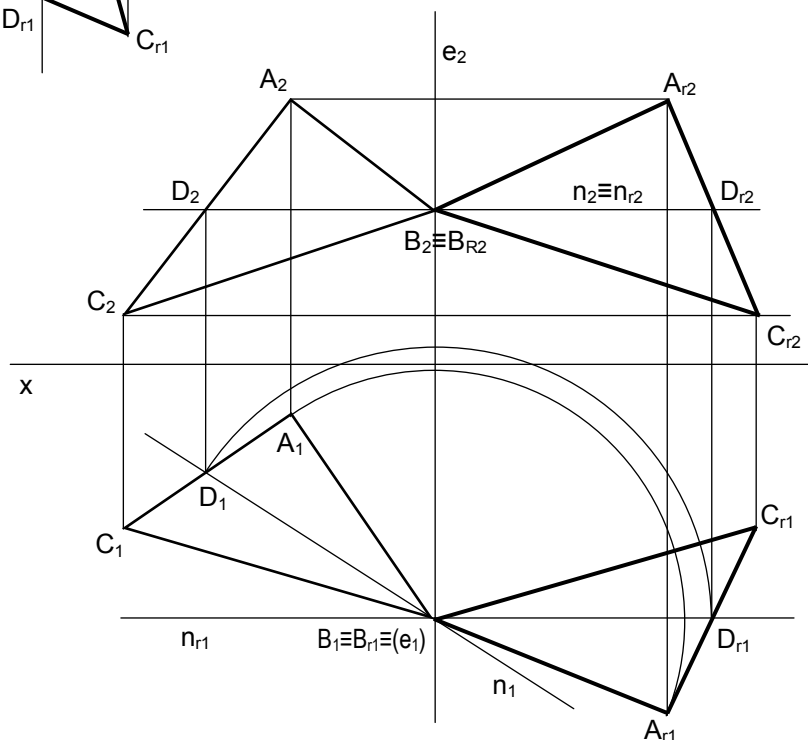
Esta situação resolve-se utilizando um eixo vertical e uma reta auxiliar horizontal. Rodando a reta para a posição de topo, o triângulo ficará de topo. O ponto D, que pertence à reta horizontal e ao triângulo, é o primeiro a ser rodado. Depois foi rodado o ponto A com a mesma amplitude. A nova posição do ponto C obtém-se com o alinhamento dos pontos A e D.

Para passar este triângulo para vertical utiliza-se um eixo de topo e uma reta auxiliar frontal, que se roda até à posição vertical.

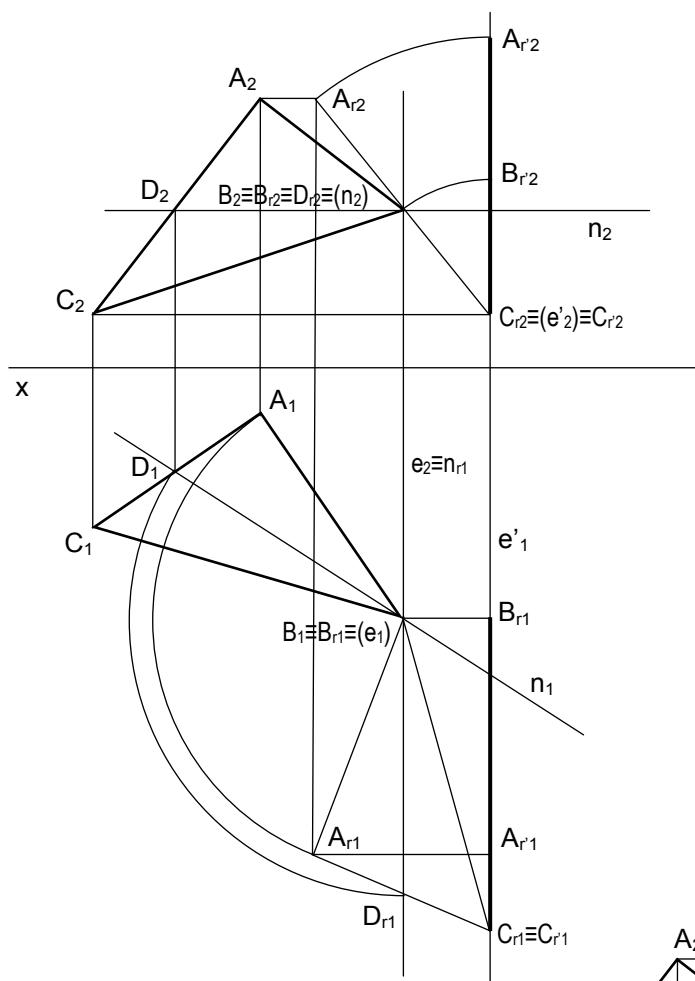
### Passar um triângulo oblíquo para de rampa

Em relação ao caso anterior, neste roda-se a reta horizontal até à posição fronto-horizontal, o que garante que o triângulo fique de rampa. Aqui optou-se por rodar no sentido oposto.

Este caso também se resolveria com uma reta auxiliar frontal e um eixo de topo.



As situações anteriores resolvem-se com uma rotação, as desta página resolvem-se com duas.



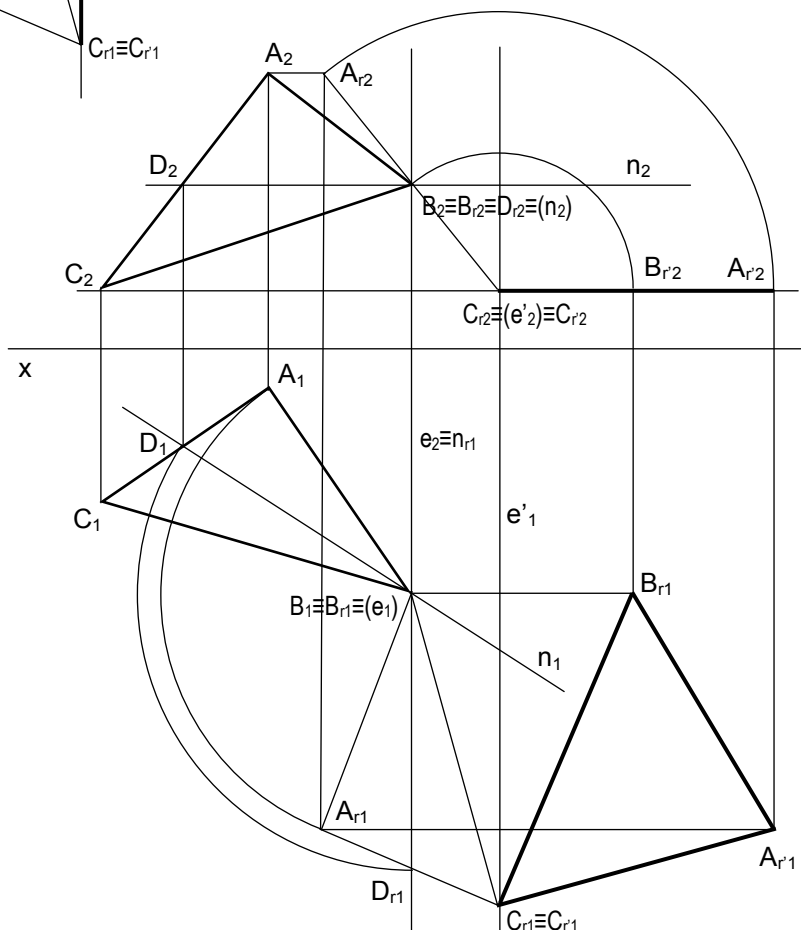
**Passar um triângulo oblíquo para de perfil**

O primeiro passo deste exercício consiste em colocar o polígono na posição de topo, tal como foi mostrado na página anterior. Só depois, com um eixo de topo contendo o ponto  $C_r$ , se rodou a figura para a posição de perfil. Na segunda rotação despreza-se a reta auxiliar  $n$ , assim como o ponto  $D$ . A posição de perfil também se obtém se a primeira rotação colocar o triângulo vertical, com um eixo de topo, aplicando-se na segunda um eixo vertical.

**Passar um triângulo oblíquo para horizontal**

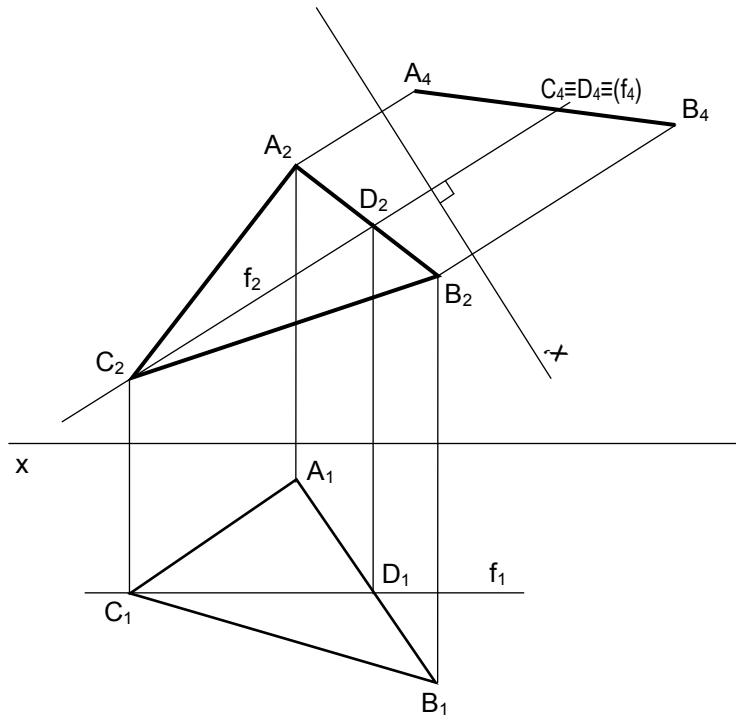
Em relação ao caso anterior, neste roda-se a nova projeção frontal do triângulo mais  $90^\circ$ , até à posição horizontal. Na segunda rotação despreza-se a reta auxiliar  $n$ , assim como o ponto  $D$ . Embora não se indique, a projeção horizontal da posição final do triângulo está em VG.

Para se colocar o triângulo oblíquo na posição frontal, procede-se de forma inversa a esta: primeiro coloca-se a figura na posição vertical, com um eixo de topo e uma reta auxiliar frontal; depois coloca-se na posição pretendida com um eixo vertical.



## Alterar as posições de triângulos utilizando mudanças de planos

Neste subcapítulo utiliza-se o mesmo triângulo das páginas anteriores. Deste modo, mais facilmente se comparam os diferentes procedimentos. A resolução de situações em que a figura se encontra à partida noutra posição, depreende-se facilmente depois de compreendidas estas.



### Passar um triângulo oblíquo para vertical

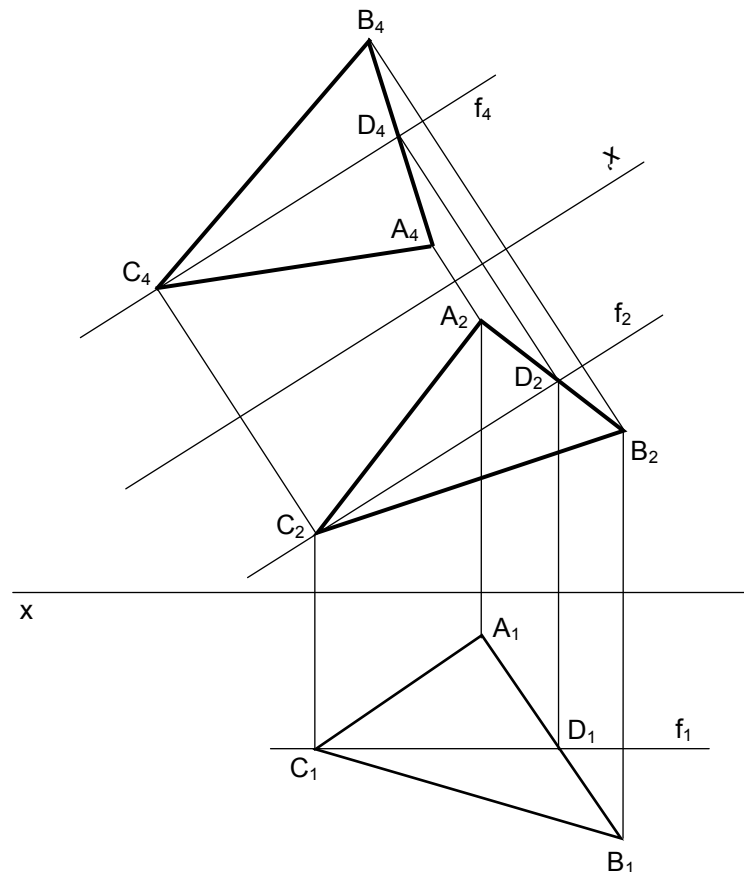
Traça-se uma reta frontal para se saber a direção a dar ao novo eixo x. deslocando os afastamentos dos vértices obtém-se uma nova projeção frontal que fica, necessariamente, reduzida a um segmento de reta.

Para tornar o triângulo de topo utiliza-se uma reta auxiliar horizontal e traça-se o eixo x na perpendicular à sua projeção horizontal.

### Passar um triângulo oblíquo para de rampa

Aqui coloca-se o novo eixo x paralelo à projeção frontal da reta auxiliar. Deste modo, a reta fica fronto-horizontal, o que prova que o triângulo fica de rampa. Foram deslocadas as medidas dos afastamentos.

Este caso também se resolveria com uma reta auxiliar horizontal, colocando o novo eixo x paralelo à sua projeção horizontal.

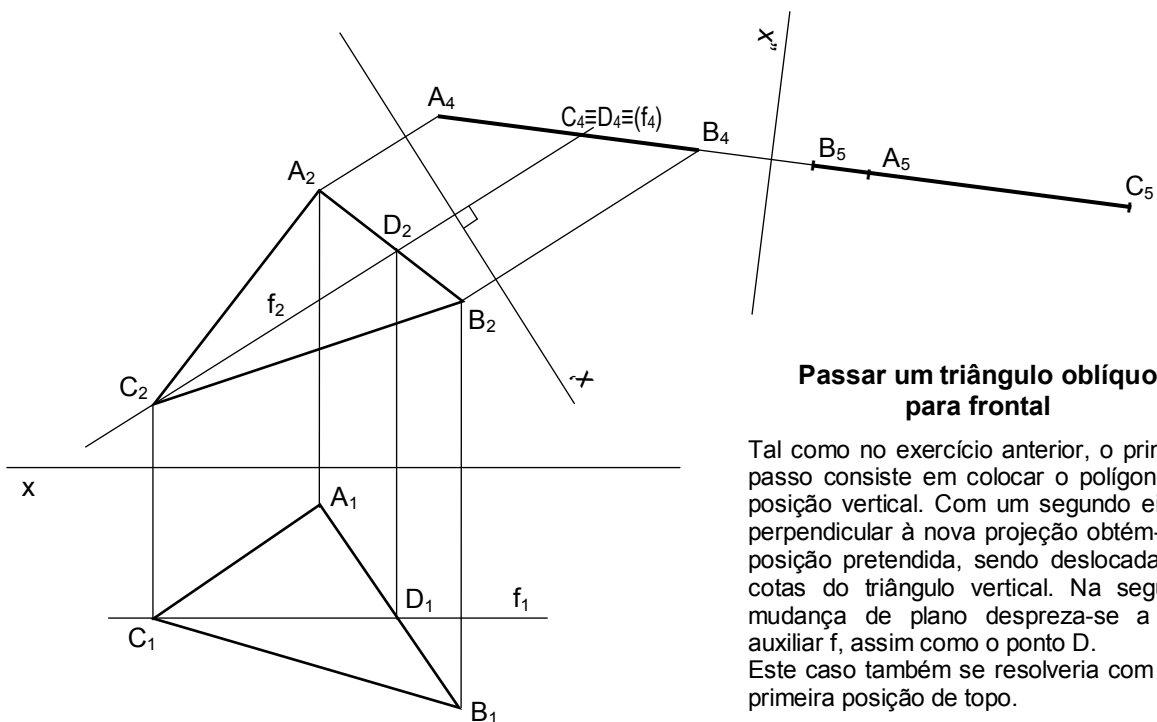
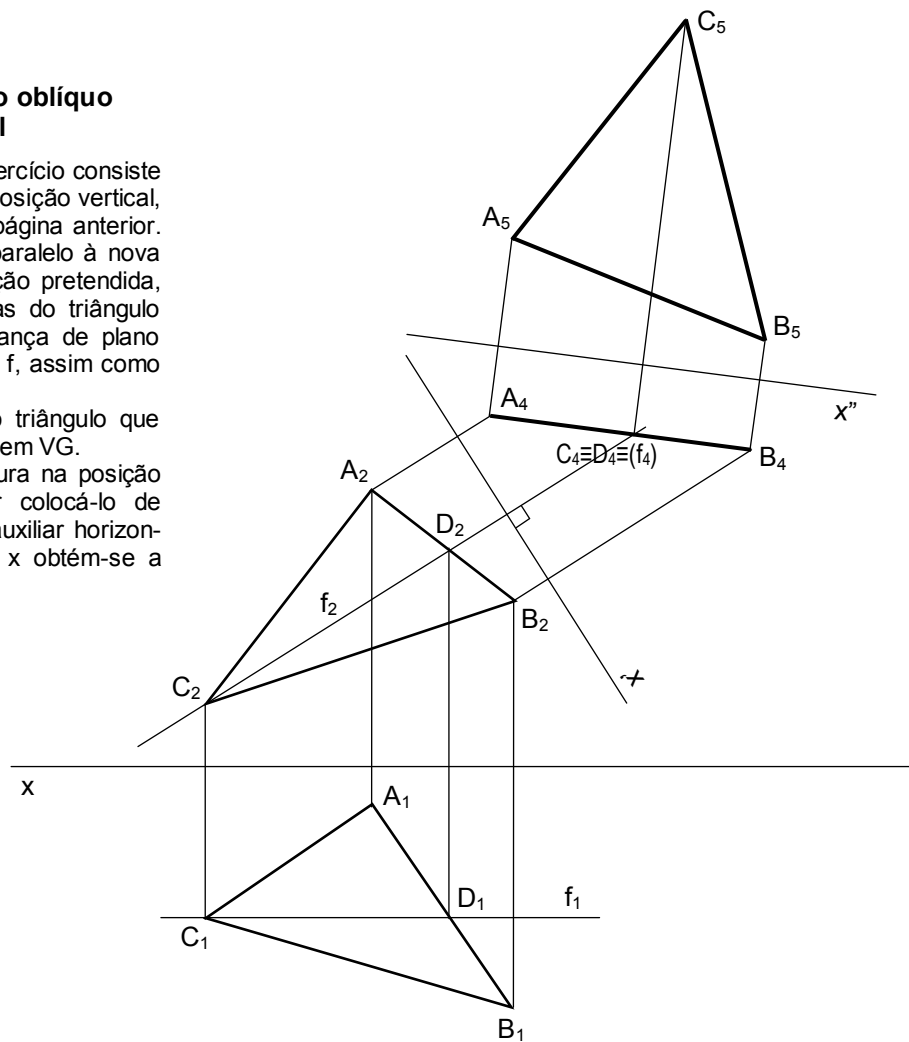


As situações anteriores resolvem-se com uma mudança de plano, estas resolvem-se com duas.

### Passar um triângulo oblíquo para frontal

O primeiro passo deste exercício consiste em colocar o polígono na posição vertical, tal como foi mostrado na página anterior. Com um segundo eixo  $x$  paralelo à nova projeção obtém-se a posição pretendida, sendo deslocadas as cotas do triângulo vertical. Na segunda mudança de plano despreza-se a reta auxiliar  $f$ , assim como o ponto  $D$ .

Embora não se indique, o triângulo que surge na posição final está em VG. Para colocar a mesma figura na posição horizontal começa-se por colocá-lo de topo, utilizando uma reta auxiliar horizontal. Com o segundo eixo  $x$  obtém-se a posição desejada.



### Passar um triângulo oblíquo para frontal

Tal como no exercício anterior, o primeiro passo consiste em colocar o polígono na posição vertical. Com um segundo eixo  $x$  perpendicular à nova projeção obtém-se a posição pretendida, sendo deslocadas as cotas do triângulo vertical. Na segunda mudança de plano despreza-se a reta auxiliar  $f$ , assim como o ponto  $D$ . Este caso também se resolveria com uma primeira posição de topo.

## Figuras planas – Exercícios

### Representação de polígonos projetantes

1. Representar o triângulo equilátero horizontal [ABC], sabendo que A(3;2;3) é o vértice de menor afastamento, B(4;6;3) o de maior abcissa e C o de menor abcissa.
2. Representar o triângulo isósceles frontal [DEF], sabendo que F(-1;2;2) e E(2;5;2) são os vértices de maior cota e que os lados [DE] e [DF] medem 5cm.
3. Representar o quadrado horizontal [GHIJ], sabendo que G(2;0;2) e H(-2;1,5;2) são vértices consecutivos e os de menor afastamento.
4. Representar o retângulo frontal [KLMN], sendo K(4;3;1) e M(-2;3;5) dois vértices opostos da figura. O lado [KN] mede 5,5cm, sendo N o vértice de menor afastamento.
5. Representar o losango horizontal [PQRS], sendo P(-2;1;2) e R(3;6;2) dois vértices opostos da figura. Os lados do losango medem 4cm.
6. Representar o hexágono regular frontal [ABCDEF], sendo A(3;4;2) e B(4;4;5) os vértices situados mais à esquerda.
7. Representar o pentágono regular horizontal [GHIJK], inscrito numa circunferência com 3cm de raio e centro em O(2;4;3), sendo o lado [IJ] vertical e o de menor abcissa.
8. Representar o triângulo vertical [ABC], sabendo as coordenadas dos vértices A(3;4;4), B(1;?;6) e C(-1;1;2). Determinar também a VG desse triângulo.
9. Representar o quadrado [ABCD], situado no plano vertical  $\omega$ , que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa e faz 55°ad. Conhecem-se as coordenadas dos vértices opostos A(0;4) e C(5;5).
10. Representar o triângulo equilátero [DEF], situado no plano de topo  $\theta$ , que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa e faz 40°ad. Conhecem-se os vértices E(4;1) e F(5;3).
11. Representar o pentágono regular [ABCDE], situado no plano de topo  $\delta$ , que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa e faz 45°ae. Conhece-se A(0;3) e O(4;3), centro da circunferência circunscrita ao polígono, e sabe-se que o lado [CD] é frontal.
12. Representar quadrado de perfil [JKLM], situado no plano  $\psi$ . Os pontos K(1;5) e M(6;3) são dois vértices opostos do polígono.
13. Representar o pentágono [PQRST], situado no plano de perfil  $\rho$ , com 4cm de abcissa. O polígono está inscrito numa circunferência tangente ao PFP, com 3cm de raio e centro em O(3;4), e o seu lado de maior afastamento é vertical.

### Representação de polígonos não projetantes

14. Determinar o hexágono regular [ABCDEF], situado no plano  $\pi$ , que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa, cujos traços frontal e horizontal fazem 55°ad e 40°ad, respetivamente. O polígono está inscrito numa circunferência com 3m de raio e centro em O(3;4), e tem dois lados horizontais.
15. Representar o triângulo equilátero [PQR], situado no plano  $\alpha$ , que cruza o eixo x no ponto de abcissa nula e é perpendicular ao  $\beta_{1/3}$ , fazendo o seu traço frontal 40°ae. Conhecem-se as coordenadas dos vértices P(3;0) e Q(0;3).
16. Representar o triângulo equilátero [GHI] com 6cm de lado, situado no plano  $\theta$ , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 55°ad e 35°ae, respetivamente. Conhece-se G(3;0) e sabe-se que H está situado no traço frontal do plano.
17. Representar o quadrado [DEFG], situado no plano  $\pi$ , que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal 55°ae e 40°ad, respetivamente. Conhecem-se as coordenadas dos vértices consecutivos D(0;2) e E(3;0).
18. Representar o pentágono regular [JKLMN], situado no plano de rampa  $\alpha$ , cujos traços têm 4cm de cota e 6cm de afastamento. O polígono está inscrito numa circunferência com 3,5cm de raio, cujo centro se situa a igual distância dos dois traços. O lado de maior cota do polígono é fronto-horizontal.
19. Representar o retângulo [JKLM], situado no plano de rampa  $\theta$ . Os vértices J e K são consecutivos, têm 1cm de cota e 1cm de afastamento, respetivamente, e situam-se na reta r, cujos traços são H(6;5;0) e F(1;0;4). O vértice M situa-se no traço horizontal do plano.
20. Representar o quadrado [ABCD], situado no plano de rampa  $\psi$ , cujos traços têm 2cm de cota e -1,5cm de afastamento. O lado cujos vértices são os pontos A(6;1;?) e B(1;1;?) é o de menor cota.
21. Representar o triângulo equilátero [PQR], situado no plano passante  $\delta$ . Conhecem-se os vértices P(4;2;3) e Q(2;?;7).
22. Representar o hexágono regular [ABCDEF], situado no  $\beta_{1/3}$ . O polígono está inscrito numa circunferência com 3cm de raio e centro no ponto O(-2;4;4), sendo dois dos seus lados fronto-horizontais.

### Verdadeira grandeza de polígonos

23. Determinar a VG do triângulo que tem como vértices os pontos  $G(2;0;4)$ ,  $H(2;4;6)$  e  $I(2;2;1,5)$ .
24. Determinar a VG do polígono que tem como vértices os pontos  $A(3;3;3)$ ,  $B(3;4;1)$ ,  $C(3;2;-2)$  e  $D(3;-1;2)$ .
25. Determinar a VG do triângulo de topo que tem como vértices os pontos  $E(0;-1;1)$ ,  $F(-2;4;2)$  e  $G(-3,5;2;?)$ .
26. Determinar a VG do triângulo vertical que tem como vértices os pontos  $J(1;-1;-1)$ ,  $K(5;4;2)$  e  $L(3;?;4)$ .
27. Determinar a VG do losango [ABCD], situado no plano oblíquo  $\beta$ , cujos traços frontal e horizontal fazem  $50^\circ$ ae e  $40^\circ$ ae, respetivamente, cruzando o eixo x num ponto com -1cm de abcissa. Sabe-se que o ponto  $A(1;2)$  é o de menor abcissa e que os lados do polígono medem 4cm, sendo [AB] horizontal e [AD] frontal.
28. Determinar a VG do triângulo que tem como vértices os pontos  $M(1;3;1)$ ,  $N(-1;0;4)$  e  $O(-2;5;2)$ .
29. Determinar as projeções e a VG do quadrado [PQRS], situado no plano de rampa  $\alpha$ . Os pontos  $A(0;3;0)$  e  $C(-2;0;4)$  são dois vértices opostos do polígono.
30. Determinar a VG do triângulo situado no plano passante  $\pi$ , cujos vértices são  $T(6;2;3)$ ,  $U(3;0;0)$  e  $V(1;3;?)$ .

### Representação de circunferências projetantes

31. Representar duas circunferências, uma horizontal com 2,5cm de raio e centro no ponto  $O(4;4;2)$ , outra frontal com 2cm de raio e centro no ponto  $O'(-3;0;3)$ .
32. Representar duas circunferências, ambas com 2,5cm de raio, uma horizontal com centro em  $X(3;-2;4)$ , outra frontal com centro em  $X'(-3;4;-4)$ .
33. Representar uma circunferência de perfil, com 3cm de raio e centro no ponto  $Q(2;5;4)$ . Nessa circunferência marcar o ponto R, com 7cm de afastamento e cota superior à de Q.
34. Representar uma circunferência com 3cm de raio e centro em  $O(4;4)$ , situada no plano vertical  $\beta$ , que cruza o eixo x num ponto com 1cm de abcissa e faz  $45^\circ$ ad.
35. Representar uma circunferência com 3cm de raio e centro em  $Q(3;3)$ , situada no plano de topo  $\sigma$ , que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa e faz  $35^\circ$ ae.

### Representação de circunferências não projetantes

36. Representar uma circunferência com 3,5cm de raio e centro em  $O(4;5)$ , situada no plano  $\rho$ , que cruza o eixo x num ponto com -2cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal  $55^\circ$ ae e  $45^\circ$ ae, respetivamente.
37. Representar uma circunferência com 3,5cm de raio, sendo tangente a ambos os traços do plano  $\pi$  onde se situa, que cruza o eixo x num ponto com 3cm de abcissa, fazendo os seus traços frontal e horizontal,  $40^\circ$ ad e  $50^\circ$ ad, respetivamente.
38. Representar o plano de rampa  $\alpha$ , cujos traços têm 5cm de cota e 3cm de afastamento. Nesse plano representar uma circunferência com 3cm de raio, que é tangente ao traço horizontal do plano e tem centro no ponto X com -2cm de abcissa.
39. Representar uma circunferência com 3,5cm de raio e centro no ponto  $O(6;4)$ , situada no plano passante  $\psi$ .

### Alterar posições de triângulos utilizando rotações

40. Representar o triângulo cujos vértices são os pontos  $A(2;4;5)$ ,  $B(0;1;1)$  e  $C(-2;3;2)$ . Utilizando rotações, colocá-lo nas seguintes posições:
- de topo
  - vertical
  - de rampa
  - de perfil
  - horizontal
  - frontal
41. Representar o triângulo equilátero cujos vértices são os pontos  $D(4;-1;4)$ ,  $E(3;2;2,5)$  e  $F(0;0;5)$ . Utilizando rotações, colocá-lo nas seguintes posições:
- de perfil
  - horizontal
  - frontal

### Alterar posições de triângulos utilizando mudanças de planos

42. Representar o triângulo cujos vértices são os pontos  $A(2;4;5)$ ,  $B(0;1;1)$  e  $C(-2;3;2)$ . Utilizando mudanças de planos, colocá-lo nas seguintes posições:
- de topo
  - vertical
  - de rampa
  - de perfil
  - horizontal
  - frontal
43. Representar o triângulo equilátero cujos vértices são os pontos  $D(4;-1;4)$ ,  $E(3;2;2,5)$  e  $F(0;0;5)$ . Utilizando mudanças de planos, colocá-lo nas seguintes posições:
- de perfil
  - horizontal
  - frontal